ĐẠI HỌC QUỐC GIA T.P HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG LÊ HỒNG PHONG T.P HỒ CHÍ MINH

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
NĂM 2012

HƯỚNG DẪN GIẢI

MÔN THI: TOÁN (Chuyên)

Câu 1: Giải phương trình: $\sqrt{8x+1}+\sqrt{46-10x}=-x^3+5x^2+4x+1$

HDG:

Điều kiện : $\frac{-1}{8}\le x\le\frac{46}{10}$

$$\sqrt{8x+1}+\sqrt{46-10x}=-x^3+5x^2+4x+1 \Leftrightarrow \sqrt{8x+1}-3+\sqrt{46-10x}-6=-x^3+5x^2+4x-8$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{8x+1}-3\right)\left(\sqrt{8x+1}+3\right)}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{\left(\sqrt{46-10x}-6\right)\left(\sqrt{46-10x}+6\right)}{\sqrt{46-10x}+6}=(1-x)\left(x^2-4x+8\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-8(1-x)}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{10(1-x)}{\sqrt{46-10x}+6}=(1-x)\left(x^2-4x+8\right)$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 1-x=0 & (1)\\ \frac{-8}{\sqrt{8x+1}+3}+\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}=x^2-4x+8 & (2)\end{array}\right.$$

Từ (1) suy ra: x = 1 .

Từ (2), ta có : $x^2-4x+8=(x-2)^2+4\ge 4$ với mọi x

$$\sqrt{46-10x}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{46-10x}+6\ge 6\Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}\le\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

suy ra : $\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}+\frac{-8}{\sqrt{8x+1}+3}=\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}-\frac{8}{\sqrt{8x+1}+3}<\frac{5}{3}$

Vậy : $\frac{10}{\sqrt{46-10x}+6}+\frac{-8}{\sqrt{8x+1}+3}<x^2-4x+8$, với mọi x.

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất : x = 1.

Câu 2: Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. với a là số nguyên dương, biết: f(5) – f(4) = 2012 .

Chứng minh: f(7) – f(2) là hợp số.

HDG:

Ta có :

f(5) – f(4) = 2012 ⇔ (125a + 25b + 5c + d) – (64a + 16b + 4c + d) = 2012 ⇔ 61a + 9b + c = 2012.

f(7) – f(2) = (343a + 49b + 7c + d) – (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c

= 305a + 45b + 5c +30a = 5(61a + 9b + c) + 30a = 2012 + 30a = 2(1006 + 15a)

Vì a là số nguyên nên ta được : 2(1006 + 15a) chia hết cho 2.

Vậy f(7) – f(2) là hợp số

Câu 3: Cho ba số dương a; b và c thỏa a + b + c = 1. Tìm GTNN của :

$$A = 14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

HDG:

Ta có : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow \dfrac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2} = ab+bc+ca$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si:

$a^3 + b^2a \geq 2a^2b$; $b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$; $c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$, dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$

suy ra: $\dfrac{1}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq \dfrac{3}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow \dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq \dfrac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{3-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Đặt : $t = a^2 + b^2 + c^2$, ta có : $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 1 \Leftrightarrow t \geq \dfrac{1}{3}$,

dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Ta được : $A = 14t + \dfrac{3-3t}{2t} = \dfrac{28t}{2} + \dfrac{3}{2t} - \dfrac{3t}{2t} = \dfrac{27t}{2} + \dfrac{3}{2t} + \dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $\dfrac{27t}{2} + \dfrac{3}{2t} \geq 2\sqrt{\dfrac{27t}{2}.\dfrac{3}{2t}} = 9$ dấu "=" xảy ra khi : $t = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác : $\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{2} \geq \dfrac{1}{6} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{4}{3}\left(\text{vì}: t \geq \dfrac{1}{3}\right)$

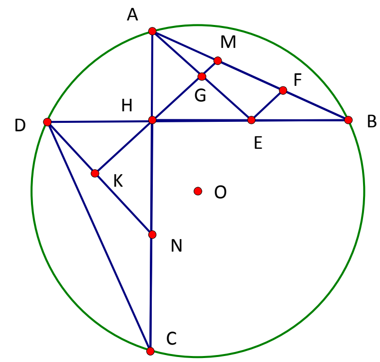
Suy ra: $A \geq 9 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{23}{3}$ dấu "=" xảy ra khi : $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{1}{3}$ và a = b = c suy ra: $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{23}{3}$, khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Câu 4: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O; R) có AC vuông góc BD tại H. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho:

AM = 1/3 AB. Trên cạnh HC lấy trung điểm N. Chứng minh MH vuông góc với DN.

HDG:



+ Gọi E; F lần lượt là trung điểm của HB và MB,

Suy ra: AM = MF = FB = 1/3 AB.

+ Gọi K và G lần lượt là giao điểm của MH với DN và AE.

+ Ta có: $\Delta AHB \sim \Delta DHC$ => AH : HB = DH : HC

=> AH : (2HE) = DH : (2HN) ⇔ AH : HE = DH : HN

=> $\Delta AHE \sim \Delta DHN$ => $\widehat{NDH} = \widehat{EAH}$

+ Ta có : EF là đường trung bình của tam giác HMB => HM // EF

+ Xét ΔAEF : AM = MF và MG // EF => AG = GE.

+ Xét ΔAEH: vuông tại H có G là trung điểm của AE, suy ra:

AG = HG = EG => ΔAHG cân tại G => $\widehat{AHG} = \widehat{EAH}$

+ Ta có : $\widehat{KDH} + \widehat{DHK} = \widehat{EAH} + \widehat{DHK} = \widehat{AHG} + \widehat{DHK} = 90^0$, suy ra ΔDHK vuông tại K.

Vậy MH vuông góc với DN.(đpcm)

Câu 5: Cho đường tròn tâm O và đường tròn tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B(O và I khác phía đối với A và B). IB cắt (O) tại E: OB cắt (I) tại F. Qua B vẽ MN // EF(M thuộc (O) và N thuộc (I).

a) Chứng minh: Tứ giác OAIE nội tiếp.

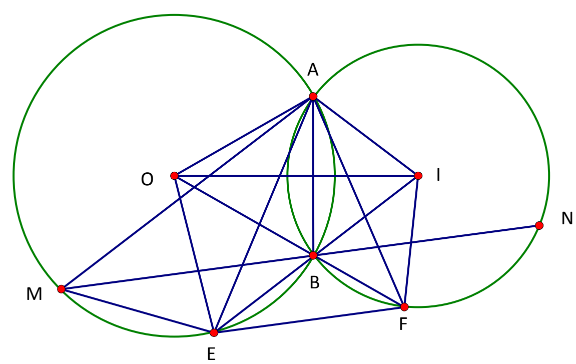
b) Chứng minh: AE + AF = MN

HDG:

a) + ΔBOE cân tại O => $\widehat{OBE} = \widehat{OEB}$;

+ ΔBIF cân tại I => $\widehat{IBF} = \widehat{IFB}$;

Do: $\widehat{OBE} = \widehat{IBF} \Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{IFB}$, suy ra: tứ giác OIFE nội tiếp.



+ Do: $\Delta AOI = \Delta BOI$ (c – c – c) => $\widehat{OAI} = \widehat{OBI}$

+ Ta có :

$\widehat{OAI} + \widehat{OEI} = \widehat{OBI} + \widehat{OBE} = 180^0$, suy ra tứ giác AOEI nội tiếp

Vậy 5 điểm O; A; I; E; F nằm trên cùng một đường tròn.

Vậy Tứ giác OAIE nội tiếp được.

b) + Xét đường tròn (O) : $\widehat{AMB} = \widehat{FOI} = \frac{1}{2}\text{Sd } \overset{\frown}{AB}$

+ Do : MN // EF ta được : $\widehat{BEF} = \widehat{MBE}$ (slt)

+ Do 5 điểm O; A; I; E; F nằm trên cùng một đường tròn, suy ra: $\widehat{BEF} = \widehat{FOI}$

Suy ra: $\widehat{AMB} = \widehat{FOI} = \widehat{BEF} = \widehat{MBE}$ suy ra: AM // EB.

Vậy tứ giác MABE là hình thang và nội tiếp đường tròn (O) suy ra: MABE là hình thang cân

=> MB = AE.

+ Chứng minh tương tự ta được: NB = AF, suy ra: AE + AF = MB + NB = MN. (đpcm).

Câu 6: Trên mặt phẳng cho 2013 điểm tùy ý sao cho khi 3 điểm bất kỳ thì tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa 2 điểm đó luôn bé hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1007 điểm(kể cả biên).

<u>HDG:</u>

Gọi các điểm là : A_1; A_2; A_3; …; A_i; A_{i+1} ; A_{2012}; A_{2013}. Ta chia các cặp điểm như sau: (A_1; A_{2013});

(A_2; A_{2012}); …(A_i; A_{2013-i})…;($A_{1006;}$ A_{1008}) , và điểm A_{1007}.

Xét điểm A_{1007} với các cặp điểm đã cho, theo giả thiết trong mỗi cặp điểm tồn tại một điểm A_m sao cho đoạn thẳng $A_{1007}A_m$ có độ dài nhỏ hơn 1. Không mất tính tổng quát giả sử các điểm A_1; A_2; …; A_{1006} có khoảng cách đến điểm A_{1007} nhỏ hơn 1, suy ra các điểm A_1; A_2; …; A_{1006} nằm trong đường tròn tâm A_{1007} bán kính bằng 1.

Vậy tồ tại đường tròn có bán kính bằng 1 chứa 1007 điểm trong 2013 điểm đã cho. (đpcm).

Nguồn: Hocmai.vn